1ère Maths CS4 9 Février 2024 50 min Calculatrice en mode Exam Thiaude P.

<u>Exercice 1</u> [5 pts]

Soit (u_n) la suite telle que, pour tout entier naturel n : $u_n = n^2 + 4n + 1$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
La suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique, ni l'un ni l'autre ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = 2n + 5$.

3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

<u>Exercice 2</u> [5 pts]

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = 3$.

1. Déterminer l'entier naturel p tel que $u_p = 331$.

2. Calculer la somme : $S = 10 + 13 + 16 + 19 + \cdots + 331$.

<u>Exercice 3</u> [10 pts]

Une société de nettoyage de bureaux possède 160 clients en 2022 et une étude a montré que d'une année sur l'autre :

- 15% des clients ne vont pas renouveler leur contrat annuel de nettoyage
- 30 nouveaux clients vont souscrire un contrat annuel de nettoyage

Pour tout entier naturel n, on modélise le nombre client de l'année $(2022 + n)$ par u_n.

1. Justifier que : $u_0 = 160$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}85 \times u_n + 30$.

2. Le programme suivant, écrit en Python, demande à l'utilisateur d'entrer un entier naturel n puis affiche la valeur de u_n :

```
01  U=160
02  n=int(input("n="))
03  for k in range(0,
04      
05  print("u(",n,")=",U)
```

Écrire <u>sur la copie</u> les versions complètes des lignes numéro 03 et numéro 04 telles qu'elles apparaissent <u>exactement</u> dans un programme Python.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 200$.

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

c. Exprimer v_n en fonction de n.

d. Exprimer u_n en fonction de n.

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = 6 \times 0{,}85^n$.

b. Le nombre de clients de la société de nettoyage va-t-il à un moment décroitre ?

5. La capacité maximale de travail de la société de nettoyage est : 210 clients.
La société de nettoyage va-t-elle devoir refuser de nouveaux clients à cause de sa capacité maximale ? Justifier la réponse par une étude mathématique.

Corrigé

Exercice 1

Soit (u_n) la suite telle que, pour tout entier naturel n : $u_n = n^2 + 4n + 1$.

1. **• Calcul de u_0, u_1 et u_2**

$$u_0 = 0^2 + 4(0) + 1 = 1$$
$$u_1 = 1^2 + 4(1) + 1 = 1 + 4 + 1 = 6$$
$$u_2 = 2^2 + 4(2) + 1 = 4 + 8 + 1 = 13$$

Conclusion : $\boldsymbol{u_0 = 1}$, $\boldsymbol{u_1 = 6}$ et $\boldsymbol{u_2 = 13}$.

• Nature de (u_n)

On a : $u_1 - u_0 = 6 - 1 = 5$ et $u_2 - u_1 = 13 - 6 = 7$.

On constate que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

On a :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{6}{1} = 6 \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{13}{6}$$

On constate que $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

Conclusion : **la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.**

2. **Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = 2n + 5$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_n = n^2 + 4n + 1$

$u_{n+1} = (n+1)^2 + 4(n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 + 1 = n^2 + 6n + 6$

$u_{n+1} - u_n = n^2 + 6n + 6 - (n^2 + 4n + 1) = n^2 + 6n + 6 - n^2 - 4n - 1 = 2n + 5$

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1} - u_n = 2n + 5}$.

3. **Sens de variation de (u_n)**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $n \geqslant 0$ donc $2n + 5 > 0$, on en déduit que : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

On peut être plus précis :

On a $n \geqslant 0$ donc $2n + 5 > 0$, on en déduit que : $u_{n+1} - u_n > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = 3$.

1. **Entier naturel p tel que $u_p = 331$**

(u_n) est arithmétique donc $u_p = u_0 + p \times r$ $(cours)$.

Or, $u_p = 331$, $u_0 = 10$ et $r = 3$, donc :

$$331 = 10 + p \times 3 \Leftrightarrow 331 - 10 = 3p \Leftrightarrow \frac{321}{3} = p \Leftrightarrow p = 107$$

Conclusion : $\boldsymbol{p = 107}$.

2. **Calcul de $S = 10 + 13 + 16 + 19 + \cdots + 331$**

Remarquons que :

$$S = 10 + 13 + \cdots + 331 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{107}$$

Or (u_n) est arithmétique donc d'après la formule du cours on obtient :

$$S = \frac{(u_0 + u_{107}) \times 108}{2}$$

$$S = \frac{(10 + 331) \times 108}{2} = \frac{341 \times 2 \times 54}{2} = 341 \times 54 = 18\,414$$

Conclusion : $\boldsymbol{S = 18\,414}$.

Exercice 3

160 clients en 2022

d'une année sur l'autre :

- 15% des clients ne vont pas renouveler leur contrat annuel de nettoyage
- 30 nouveaux clients vont souscrire un contrat annuel de nettoyage

Pour tout entier naturel n, on modélise le nombre client de l'année $(2022 + n)$ par u_n.

1. **Justifions que : $\boldsymbol{u_0 = 160}$ et que, pour tout $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = 0{,}85u_n + 30}$.**

   • u_0 est le nombre de client de l'année $(2022 + 0)$ c'est-à-dire en 2022 ; or il y a 160 clients en 2022 donc $u_0 = 160$.

   • plaçons-nous l'année $(2022 + n)$: il y a u_n clients ; il va y avoir 15% de ces u_n clients qui ne vont pas faire à nouveau appel à l'entreprise de nettoyage donc il y aura une perte de $\frac{15}{100} \times u_n$ clients, mais 30 nouveaux clients vont arriver, on en déduit que l'année suivante le nombre de clients sera :

   $$u_n - \frac{15}{100}u_n + 30 = u_n - 0{,}15u_n + 30 = (1 - 0{,}15)u_n + 30 = 0{,}85u_n + 30$$

   Or, l'année suivante il y aura u_{n+1} clients, donc : $u_{n+1} = 0{,}85 \times u_n + 30$.

   On a donc bien : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0{,}85 \times u_n + 30}$.

2. Ligne 03 `for k in range(0,n):`

   Ligne 04 **`U=0.85*U+30`**

   Version complète du programme :

```
U=160
n=int(input("n="))
for k in range(0,n):
    U=0.85*U+30
print("u(",n,")=",U)
```

3. **Pour tout $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$, on pose : $\boldsymbol{v_n = u_n - 200}$.**

   a. **Calcul de $\boldsymbol{v_0}$**

   $v_0 = u_0 - 200 = 160 - 200 = \boldsymbol{-40}$

   b. **Démontrons que (v_n) est géométrique et précisons sa raison**

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$v_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0{,}85 \times u_n + 30 - 200 = 0{,}85 \times u_n - 170$$

   $$= 0{,}85\left(u_n - \frac{170}{0{,}85}\right) = 0{,}85(u_n - 200) = 0{,}85 \times v_n$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0{,}85 \times v_n$ et 0,85 est une constante donc **la suite (v_n) est géométrique de raison $0,85$**.

[rédaction acceptée en première]

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 200}{u_n - 200} \\ &= \frac{0{,}85u_n + 30 - 200}{u_n - 200} \\ &= \frac{0{,}85u_n - 170}{u_n - 200} \\ &= \frac{0{,}85\left(u_n - \frac{170}{0{,}85}\right)}{u_n - 200} \\ &= \frac{0{,}85(u_n - 200)}{u_n - 200} \\ &= 0{,}85 \end{aligned}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = 0{,}85$ et 0,85 est une constante donc la suite (v_n) est géométrique de raison 0,85.

c. v_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$v_n = v_0 \times q^n \ \ (cours)$

Or, $v_0 = -40$ et $q = 0{,}85$ donc $v_n = -40 \times 0{,}85^n$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{v_n = -40 \times 0,85^n}$.

d. Exprimer u_n en fonction de n.

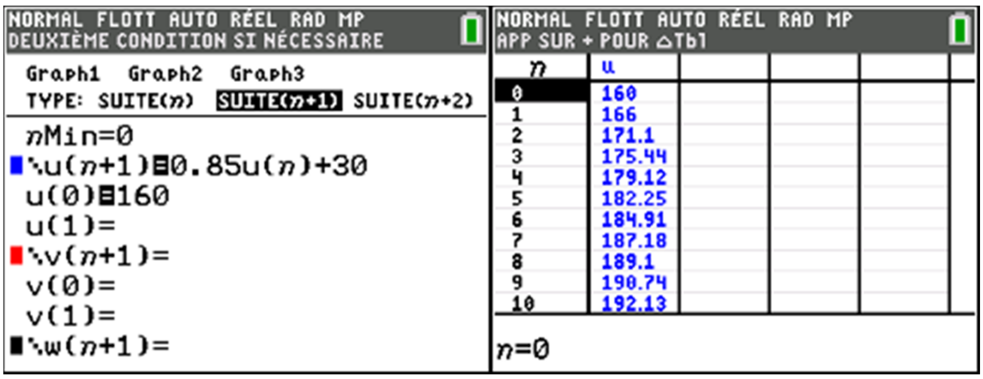
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $v_n = u_n - 200$, donc $u_n = v_n + 200$

Or $v_n = -40 \times 0{,}85^n$ donc $u_n = -40 \times 0{,}85^n + 200$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n = -40 \times 0,85^n + 200}$.

Vérification



La formule donne, pour $n = 2$: $u_2 = -40 \times 0{,}85^2 + 200 = 171{,}1$ ✓

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -40 \times 0{,}85^{n+1} + 200 - (-40 \times 0{,}85^n + 200) \\ &= -40 \times 0{,}85^{n+1} + 200 + 40 \times 0{,}85^n - 200 \\ &= -40 \times 0{,}85^n \times 0{,}85 + 40 \times 0{,}85^n \times 1 \\ &= 40 \times 0{,}85^n(-0{,}85 + 1) \\ &= 40 \times 0{,}85^n \times 0{,}15 \\ &= 6 \times 0{,}85^n \end{aligned}$$

On a donc bien : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1} - u_n = 6 \times 0,85^n}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a montré en **a.** que : $u_{n+1} - u_n = 6 \times 0{,}85^n$.

Or : $0, 0{,}85^n > 0$ et $6 > 0$ donc $6 \times 0{,}85^n > 0$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

Par conséquent **le nombre de client ne va jamais décroitre**.

On peut être plus précis :

… Or : $0, 0{,}85^n > 0$ et $6 > 0$ donc $6 \times 0{,}85^n > 0$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

5. La capacité maximale de travail de la société de nettoyage est : 210 clients.
La société de nettoyage va-t-elle devoir refuser de nouveaux clients à cause de sa capacité maximale ? Justifier la réponse par une étude mathématique.

On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -40 \times 0{,}85^n + 200$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$210 - u_n = 210 - (-40 \times 0{,}85^n + 200) = 10 + 40 \times 0{,}85^n$$

Or, $410 + 40 \times 0{,}85^n > 0$ donc $210 - u_n > 0$, autrement dit $210 > u_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 210$ donc **le nombre de clients ne dépassera jamais la capacité maximale**.

